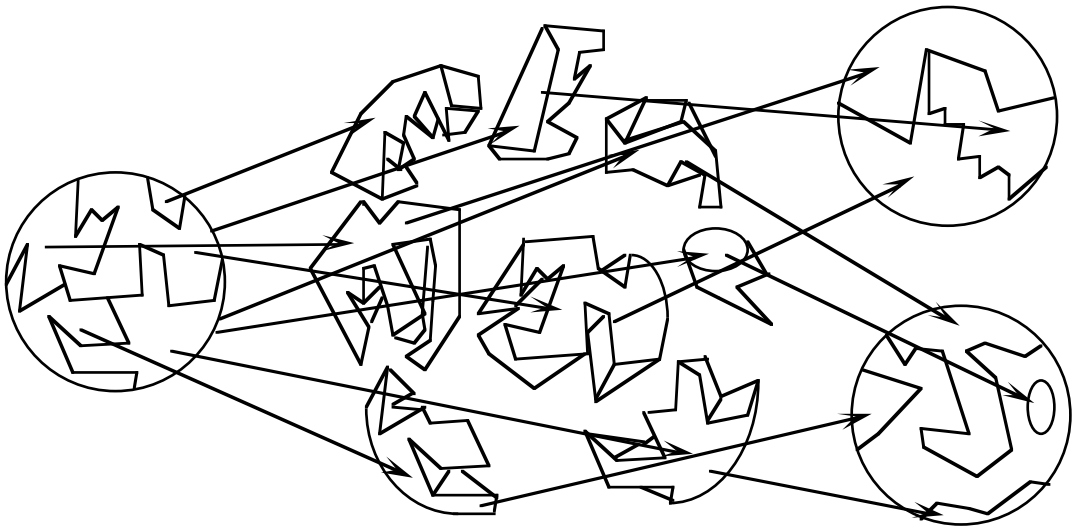
La Paradoja de Banach-Tarski

Carlos Ivorra
(http://www.uv.es/=ivorra)

El propósito de estas páginas es demostrar el siguiente teorema:

Paradoja de Banach-Tarski *Es posible dividir una esfera (llena) de radio* 1 *en ocho partes disjuntas dos a dos, de modo que, aplicando movimientos oportunos a cinco de ellas, obtengamos nuevos conjuntos que constituyan una partición de una esfera (llena) de radio* 1*, y lo mismo ocurra con las tres partes restantes.*

En otras palabras, es posible fabricar un puzzle de ocho piezas que, combinadas de una determinada manera, formen una esfera llena (sin agujeros) y, combinadas de otra manera, formen dos esferas llenas (sin agujeros) del mismo radio, tal y como ilustra la figura:



Se puede demostrar que el número total de partes necesario puede reducirse a cinco (y que con cuatro es imposible).

Quizá sea conveniente advertir que, a pesar de su nombre, este resultado es un teorema matemático como cualquier otro, no una falacia cuya prueba contenga alguna clase de error. Desde un punto de vista físico, la construcción de tales piezas es imposible porque el concepto geométrico de punto no tiene realidad física. (Por ejemplo, veremos que una de las ocho piezas consta únicamente de un punto.)

Desde un punto de vista matemático, parece que la paradoja de Banach-Tarski pueda refutarse basándose en el hecho de que las dos esferas finales tienen el doble de volumen que la esfera inicial. Sin embargo, lo que prueba la paradoja es que no es posible definir el volumen de cualquier conjunto de puntos: (algunos de) los trozos en que se descompone la esfera no tienen volumen (técnicamente, son conjuntos no medibles Lebesgue), por lo que no es posible apelar al hecho de que los movimientos conservan el volumen. (Los movimientos sólo conservan el volumen de los conjuntos que tienen volumen.)

La demostración de la paradoja se basa en las propiedades de los giros de $\mathbb{R}^3$. En lo sucesivo, por *giro* entenderemos un giro en $\mathbb{R}^3$ respecto a un eje que pasa por el origen, pues no vamos a necesitar otro tipo de giros. En la práctica sólo vamos a necesitar la siguiente caracterización operativa de los giros:

> *Una aplicación lineal $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (determinada por una matriz A de dimensión 3×3) es un giro si y sólo si ϕ es una isometría de determinante 1, es decir, si y sólo si la matriz A es regular, cumple $AA^t = I$ y $|A| = 1$.*

A partir de esta caracterización es inmediato que la composición de dos giros vuelve a ser un giro y que la aplicación inversa de un giro es otro giro. Admitiremos también como giro (por definición) a la aplicación identidad, de modo que el conjunto de todos los giros resulta ser un grupo con la composición de aplicaciones.

Fijemos un número real ω y consideremos las matrices

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\cos\omega & 0 & \operatorname{sen}\omega \\ 0 & -1 & 0 \\ \operatorname{sen}\omega & 0 & \cos\omega \end{pmatrix}, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una comprobación rutinaria muestra que Φ y Ψ son las matrices de sendos giros (es decir, que cumplen que $\Phi\Phi^t = \Psi\Psi^t = I$ y que $|\Phi| = |\Psi| = 1$), así como que $\Phi^2 = \Psi^3 = I$.

Nota La relación $\Phi^2 = I$ se interpreta como que Φ es un giro de π radianes e, igualmente, $\Psi^3 = I$ significa que Ψ es un giro de $2\pi/3$ radianes. Llamando $w = (\operatorname{sen}(\omega/2), 0, \cos(\omega/2))$, es fácil ver que $w\Phi = w$, lo que se interpreta como que el vector w apunta en la dirección del eje de giro. Así pues, Φ es un giro de π radianes cuyo eje es la recta del plano XZ que forma un ángulo $\omega/2$ respecto del eje Z. Respecto a Ψ, es fácil ver que su eje de giro es el eje Z. No vamos a necesitar estos hechos. ∎

El corazón de la paradoja de Banach-Tarski es el siguiente teorema, debido a Hausdorff. La prueba es puro cálculo, pero transparente:

> *Sea ω un número real tal que $\cos\omega$ sea un número trascendente, es decir, que no sea raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales. Sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ matrices de la forma $\sigma_i = \Phi$, $\sigma_i = \Psi$ o $\sigma_i = \Psi^2$, pero tales que no haya dos consecutivas con las misma base (que las Φs y las Ψs se alternen). Entonces la matriz $\sigma_1 \cdots \sigma_n$ no es la identidad.*

DEMOSTRACIÓN: Una expresión de la forma indicada ha de ser de una de estas clases, según cómo empiece y cómo acabe:

1. $\Psi^{p_1}\Phi\Psi^{p_2}\Phi\cdots\Psi^{p_m}\Phi$,
2. $\Phi\Psi^{p_1}\Phi\Psi^{p_2}\cdots\Phi\Psi^{p_m}$,
3. $\Psi^{p_1}\Phi\Psi^{p_2}\Phi\cdots\Phi\Psi^{p_m}$,
4. $\Phi\Psi^{p_1}\Phi\Psi^{p_2}\cdots\Psi^{p_m}\Phi$,

donde cada p_i es 1 o 2 y $m \geq 1$.

Vamos a probar el teorema para las expresiones del tipo 1), es decir, para expresiones de la forma $\tau_1\cdots\tau_n$ donde cada $\tau_i = \Psi\Phi$ o $\tau_i = \Psi^2\Phi$, o sea, una de las dos matrices

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\omega & \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega & \operatorname{sen}\omega \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\omega & \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

Queremos probar que $\tau_1\cdots\tau_n$ no es nunca la identidad. Por simplificar vamos a ocuparnos sólo de su última fila, es decir, de $(0,0,1)\tau_1\cdots\tau_n$. Vamos a probar que

$$(0,0,1)\tau_1\cdots\tau_n = (P_{n-1}(\cos\omega)\operatorname{sen}\omega, \sqrt{3}\,Q_{n-1}(\cos\omega)\operatorname{sen}\omega, R_n(\cos\omega)),$$

donde P_n, Q_n, R_n son los polinomios dados por:

$$P_0(x) = -\frac{1}{2}, \qquad Q_0(x) = \pm\frac{1}{2}, \qquad R_1(x) = x,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2}xP_{n-1}(x) \pm \frac{3}{2}Q_{n-1}(x) - \frac{1}{2}R_n(x),$$
$$Q_n(x) = \mp\frac{1}{2}xP_{n-1}(x) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x) \pm \frac{1}{2}R_n(x),$$
$$R_{n+1}(x) = (1-x^2)P_{n-1}(x) + xR_n(x).$$

(Después veremos que los subíndices se corresponden con los grados.)

Para $n = 1$ es inmediato. Si lo suponemos cierto para n, entonces $(0,0,1)\tau_1\cdots\tau_{n+1} =$

$$(P_{n-1}(\cos\omega)\operatorname{sen}\omega, \sqrt{3}\,Q_{n-1}(\cos\omega)\operatorname{sen}\omega, R_n(\cos\omega)) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\omega & \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega & \operatorname{sen}\omega \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\omega & \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

$$= \Big(P_{n-1}(\cos\omega)\frac{1}{2}\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\omega \pm \frac{3}{2}Q_{n-1}(\cos\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega - \frac{1}{2}R_n(\cos\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega,$$

$$\mp\frac{\sqrt{3}}{2}P_{n-1}(\cos\omega)\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\omega + \frac{\sqrt{3}}{2}Q_{n-1}(\cos\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega \pm \frac{\sqrt{3}}{2}R_n(\cos\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega,$$

$$P_{n-1}(\cos\omega)\,\mathrm{sen}^2\,\omega + R_n(\cos\omega)\cos\omega\Big)$$

$$= \Big(\mathrm{sen}\,\omega\,(\frac{1}{2}\cos\omega P_{n-1}(\cos\omega) \pm \frac{3}{2}Q_{n-1}(\cos\omega) - \frac{1}{2}R_n(\cos\omega)),$$

$$\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\omega(\mp\frac{1}{2}\cos\omega P_{n-1}(\cos\omega) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(\cos\omega) \pm \frac{1}{2}R_n(\cos\omega)),$$

$$(1-\cos^2\omega)P_{n-1}(\cos\omega) + \cos\omega R_n(\cos\omega)\Big)$$

$$= (P_n(\cos\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega, \sqrt{3}\,Q_n(\cos\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega, R_{n+1}(\cos\omega)).$$

Con esto queda probado que la relación es válida para todo n. Ahora probamos que los polinomios P_n, Q_n y R_n tienen grado n y coeficiente director

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n, \qquad \pm\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

respectivamente.

Para P_0, Q_0 y R_1 es claro. Si se cumple para P_{n-1}, Q_{n-1} y R_n, el coeficiente de grado n de P_n será

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

lo que, en particular, prueba que P_n tiene grado n.

El coeficiente de grado n de Q_n será

$$\mp\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

luego Q_n también tiene grado n.

Por último, el coeficiente de grado $n+1$ de R_{n+1} es

$$-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

luego R_{n+1} tiene grado $n+1$.

En particular, hemos probado que el coeficiente inferior derecho de la matriz $\tau_1\cdots\tau_n$ es de la forma $R_n(\cos\omega)$, donde $R_n(x)$ es un polinomio de grado n (luego no nulo) con coeficientes racionales. El polinomio $R_n(x)-1$ también es no nulo y con coeficientes racionales y, como $\cos\omega$ es un número trascendente, tenemos que $R_n(\cos\omega)-1\neq 0$, luego la matriz $\tau_1\cdots\tau_n$ no puede tener un 1 en su entrada inferior derecha, luego no puede ser la identidad.

Ahora probamos que los otros tres casos del teorema se reducen al primero. Si $\Phi\Psi^{p_1}\Phi\Psi^{p_2}\cdots\Phi\Psi^{p_m} = I$ (caso 2), multiplicamos por Φ por la izquierda y la derecha y obtenemos $\Psi^{p_1}\Phi\Psi^{p_2}\cdots\Phi\Psi^{p_m}\Phi = \Phi^2 = I$, lo cual es imposible por el caso 1 que ya hemos probado.

Si pudiera ocurrir que $\Psi^{p_1}\Phi\Psi^{p_2}\Phi\cdots\Phi\Psi^{p_m} = I$, tomamos el menor natural m para el que esto suceda (necesariamente $m > 1$). Si $p_1 = p_m$, multiplicando por Ψ^{-p_1} por la izquierda y por Ψ^{p_1} por la derecha queda $\Phi\Psi^{p_2}\Phi\cdots\Phi\Psi^{p_m+p_1} = I$, que es imposible por el caso 2, ya que $\Psi^{p_m+p_1} = \Psi^{2p_1}$ puede ser Ψ o Ψ^2, pero no desaparece.

Si $p_1 \neq p_m$, entonces $p_1 + p_m = 3$. Si $m > 3$ multiplicamos por $\Phi\Psi^{p_m}$ por la izquierda y por $\Psi^{p_1}\Phi$ por la derecha, con lo que queda $\Psi^{p_2}\Phi\cdots\Phi\Psi^{p_{m-1}} = I$, que es de tipo 3, pero de menor longitud, en contradicción con la minimalidad de m.

Quedan los casos $m = 2, 3$. Si $m = 2$ la expresión se reduce a $\Psi^{p_1}\Phi\Psi^{p_2} = I$, con lo que $\Phi = \Psi^{-p_1}\Psi^{-p_1} = \Psi^{-3} = I$, contradicción.

Si $m = 3$ queda $\Psi^{p_1}\Phi\Psi^{p_2}\Phi\Psi^{p_3} = I$ y, como $p_1 + p_m = 3$,

$$\Phi\Psi^{p_3}(\Psi^{p_1}\Phi\Psi^{p_2}\Phi\Psi^{p_3})\Psi^{p_1}\Phi = \Phi\Psi^{p_3})\Psi^{p_1}\Phi = I,$$

$$(\Phi\Psi^{p_3}\Psi^{p_1}\Phi)\Psi^{p_2}(\Phi\Psi^{p_3}\Psi^{p_1}\Phi) = I,$$

y pasando al segundo miembro los dos paréntesis queda $\Psi^{p_2} = I$, lo que también es una contradicción. Esto acaba la prueba del caso 3.

Por último, si $\Phi\Psi^{p_1}\Phi\Psi^{p_2}\cdots\Psi^{p_m}\Phi = I$, multiplicando por Φ a ambos lados obtenemos una expresión de tipo 3. ∎

Observemos que existe un ángulo ω tal que $\cos\omega$ sea trascendente, pues la función coseno toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1, y en el intervalo $[-1, 1]$ existen infinitos números trascendentes.

A partir de aquí podemos olvidar por completo las matrices. En lo sucesivo Φ y Ψ representarán los giros que en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ tienen por matrices a las matrices que hasta ahora hemos llamado con estos nombres, donde ω es un ángulo fijo en las condiciones del teorema anterior. En resumen, Φ y Ψ son giros de π y $2\pi/3$ radianes, respectivamente, con la propiedad de que si los componemos cualquier número de veces sin repetir Φ dos veces seguidas y sin poner Ψ tres veces seguidas, el giro que se obtiene no es el giro identidad, al que representaremos por 1.

Llamemos G al subgrupo generado por Φ y Ψ en el grupo de todos los giros. Así, un elemento típico de G es de la forma

$$\Phi\Psi\Phi\Psi\Phi\Psi\Psi\Phi\Psi\Phi\Psi\Psi\Phi\Psi\Phi.$$

Notemos que todo elemento de G distinto de 1 admite una expresión de este tipo donde no aparece Φ dos veces seguidas ni Ψ tres veces seguidas (pues si aparecen los cancelamos). Lo que dice el teorema anterior es que en estas condiciones la expresión es única.

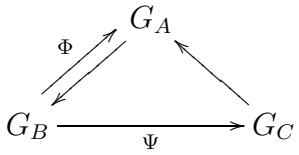
En efecto, supongamos que un elemento distinto de 1 admite dos expresiones distintas de la forma $\sigma_1 \cdots \sigma_n = \tau_1 \cdots \tau_m$, donde cada σ_1 y cada τ_i es Φ o Ψ, debidamente alternados.

Digamos que $m \le n$. Si $\sigma_n = \tau_m$ podemos simplificarlos, y seguir así hasta que los giros de la derecha difieran, es decir, hasta que uno sea Φ y el otro Ψ. (No puede suceder que simplificando lleguemos hasta $\sigma_1 \cdots \sigma_r = 1$, porque esto contradiría al teorema anterior.)

Supongamos, pues, que $\sigma_1 \cdots \sigma_n = \tau_1 \cdots \tau_m$ con $\sigma_n \neq \tau_m$. Entonces tenemos que $\sigma_1 \cdots \sigma_n \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1} = 1$, y cada uno de los inversos τ_i^{-1} es Φ o $\Psi\Psi$. Puede ocurrir que en la segunda parte haya bloques $\Psi\Psi\Psi\Psi$ que se simplifiquen a Ψ, pero es seguro que σ_n no puede simplificarse con τ_m^{-1}, por lo que tenemos una composición de giros que contradice al teorema anterior. Con esto hemos probado la unicidad.

Es importante notar que G es un grupo numerable. En efecto, para cada n, el conjunto de los giros que se expresan como composición de n giros Φ o Ψ es finito, y la unión de todos estos conjuntos es todo G. Por tanto G es una unión numerable de conjuntos finitos, luego es numerable.

Vamos a definir una partición de G en tres subconjuntos G_A, G_B y G_C. Consideremos el esquema siguiente:



Establecemos, por definición, que $1 \in G_A$, Φ, $\Psi \in G_B$, y cada vez que multiplicamos por Φ o por Ψ por la derecha pasamos de G_B a G_A si hemos multiplicado por Φ y a G_C si hemos multiplicado por Ψ, de G_C pasamos siempre a G_A y de G_A pasamos siempre a G_B.

Por ejemplo, se cumple que $\Psi\Phi\Psi\Psi\Phi \in G_A$. En efecto: partimos de que $\Psi \in G_B$, luego $\Psi\Phi \in G_A$, $\Psi\Phi\Psi \in G_B$, $\Psi\Phi\Psi\Psi \in G_C$, $\Psi\Phi\Psi\Psi\Phi \in G_A$.

La unicidad de la expresión de un elemento de G como producto de giros Φ y Ψ sin repeticiones cancelables hace que este proceso determine únivocamente a cuál de los tres conjuntos G_A, G_B o G_C pertenece cada elemento de G.

Es importante notar que, por ejemplo, el producto de un elemento de G_A por Φ no tiene por qué estar en G_B, pese a la definición que hemos dado, pues, por ejemplo, $\Phi\Psi\Phi \in G_A$, mientras que $\Phi\Psi\Phi\Phi = \Phi\Psi \in G_C$. El esquema sólo se aplica cuando al multiplicar no repetimos Φ dos veces o Ψ tres veces.

En definitiva tenemos bien definida la partición $G = G_A \cup G_B \cup G_C$. Si $X \subset G$ y $\sigma \in G$, definimos $X\sigma = \{\tau\sigma \mid \tau \in X\}$. El teorema siguiente es la forma algebraica más abstracta de la paradoja de Banach-Tarski:

Teorema *Se cumple que*

$$G_A\Phi = G_B \cup G_C, \qquad G_A\Psi = G_B, \qquad G_A\Psi^2 = G_C.$$

DEMOSTRACIÓN: Si un elemento de G_A termina en Ψ, al multiplicarlo por Φ está en G_B por definición. Si termina en Φ, es decir, si es de la forma $\sigma\Phi$, entonces σ no puede estar en G_A, pues entonces $\sigma\Phi$ estaría en G_B. Por lo tanto $\sigma\Phi\Phi = \sigma$ está en $G_B \cup G_C$. En cualquier caso, $G_A\Phi \subset G_B \cup G_C$.

Si $\sigma \in G_B$ no acaba en Φ, entonces $\sigma\Phi \in G_A$ por definición, y $\sigma = \sigma\Phi\Phi \in G_A\Phi$. Si, por el contrario, σ acaba en Φ, digamos $\sigma = \tau\Phi$, entonces τ no puede estar en G_B, ya que entonces $\sigma = \tau\Phi$ estaría en G_A. Tampoco puede estar en G_C por la misma razón. Por consiguiente, $\tau \in G_A$ y $\sigma = \tau\Phi \in G_A\Phi$. Así pues, $G_B \subset G_A\Phi$. El mismo argumento prueba que $G_C \subset G_A\Phi$, luego $G_A\Phi = G_B \cup G_C$.

Si un elemento de G_A acaba en Φ o en una sola Ψ, entonces al multiplicarlo por Ψ está en G_B por definición. Si es de la forma $\sigma\Psi\Psi$, entonces σ no puede estar en G_A, ya que en tal caso $\sigma\Psi \in G_B$ y $\sigma\Psi\Psi \in G_C$. Tampoco puede estar en G_C, pues entonces $\sigma\Psi\Psi \in G_B$, luego $\sigma \in G_B$ y $\sigma\Psi\Psi\Psi = \sigma \in G_B$. Esto prueba que $G_A\Psi \subset G_B$.

Si un elemento $\sigma \in G_B$ acaba en Φ, entonces $\sigma\Psi\Psi \in G_A$ y $\sigma = \sigma\Psi\Psi\Psi \in G_A\Psi$. Si σ acaba en Ψ, entonces $\sigma = \tau\Psi$, y τ ha de estar en G_A o, de lo contrario, σ estaría en G_A o G_C. Por lo tanto $\sigma \in G_A\Psi$. Esto prueba que $G_A\Psi = G_B$.

La igualdad restante se prueba análogamente. ∎

Llamemos S a la esfera de centro 0 y radio 1, es decir, $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. Cada elemento de G distinto de 1 deja fijos exactamente a dos puntos de S. Sea D^* el conjunto de puntos de S que son fijados por algún giro de G. Como G es numerable, D^* también lo es.

Los elementos de G son isometrías, luego conservan la norma y envían puntos de S a puntos de S. Más aún, envían puntos de $S \setminus D^*$ a puntos de $S \setminus D^*$. En efecto, si $x \in S \setminus D^*$ y $\sigma \in G$, entonces $\sigma(x) \in S \setminus D^*$, o de lo contrario existiría un $\tau \in G$ tal que $\tau(\sigma(x)) = \sigma(x)$ (por definición de D^*), y así $\sigma^{-1}(\tau(\sigma(x)) = x$. Como $\sigma\tau\sigma^{-1} \in G$, tenemos que $x \in D^*$, contradicción.

Consideramos en $S \setminus D^*$ la relación de equivalencia dada por $x\,R\,y$ si y sólo si existe un giro $\sigma \in G$ tal que $\sigma(x) = y$. El hecho de que G sea un grupo hace que esta relación sea ciertamente de equivalencia.

Sea M un conjunto formado por un elemento de cada clase de equivalencia.[1] Definimos los conjuntos

$$A^* = \{\sigma(x) \mid x \in M \wedge \sigma \in G_A\},$$
$$B^* = \{\sigma(x) \mid x \in M \wedge \sigma \in G_B\},$$
$$C^* = \{\sigma(x) \mid x \in M \wedge \sigma \in G_C\}.$$

Estos tres conjuntos constituyen una partición de $S \setminus D^*$. En efecto, todo punto de $S \setminus D^*$ está relacionado con un elemento de M, es decir, se expresa en la forma $\sigma(x)$ para

[1]En este (único) punto de la prueba usamos el axioma de elección, sin el cual no puede probarse la paradoja de Banach-Tarski, ya que sin él no puede probarse la existencia de conjuntos no medibles Lebesgue.

un $x \in M$ y un $\sigma \in G$, luego está en A^*, B^* o C^* según si σ está en G_A, G_B o G_C. Por otro lado, los tres conjuntos son disjuntos, pues si, por ejemplo, existiera un punto en A^* y B^*, tendríamos $\sigma(x) = \tau(y)$, para ciertos x, $y \in M$, $\sigma \in G_A$, $\tau \in G_B$, pero entonces $x = \sigma^{-1}(\tau(y))$, luego $x\,R\,y$. Por definición de M, ha de ser $x = y$, de donde $x = (\tau\sigma^{-1})(x)$, y esto significa que $x \in D^*$ a menos que $\tau\sigma^{-1} = 1$, lo que tampoco es posible, pues es tanto como decir que $\sigma = \tau$, pero G_A y G_B son disjuntos.[2]

En definitiva, tenemos una partición $S = A^* \cup B^* \cup C^* \cup D^*$, donde el conjunto D^* es numerable. Ahora viene el hecho clave:

$$\Phi[A^*] = B^* \cup C^*, \qquad \Psi[A^*] = B^*, \qquad \Psi^2[A^*] = C^*.$$

En efecto, se cumple $x \in \Phi[A^*]$ si y sólo si $x = \Phi(y)$, con $y \in A^*$, si y sólo si $x = \Phi(\sigma(m)) = (\sigma\Phi)(m)$, para un cierto $\sigma \in G_A$ y un $m \in M$, si y sólo si $x = \tau(m)$, para un $\tau \in G_A\Phi = G_B \cup G_C$ y un $m \in M$, si y sólo si $x \in B^* \cup C^*$. Las otras dos igualdades se prueban igual.

Entendamos bien esto: Podemos transformar B^* en A^* mediante un giro, podemos trasformar C^* en A^* mediante otro giro, pero por otro lado también podemos transformar A^* en $B^* \cup C^*$ mediante un giro. Por una parte A^*, B^*, C^* son "iguales" en el sentido de que se puede pasar de uno a otro mediante los giros oportunos, es decir, se diferencian tan sólo en la posición que ocupan. Por otra parte A^* es el doble de grande que B^*, pues puede transformarse en B^* y otro trozo igual a él. Vemos que la en apariencia inocente propiedad del grupo de giros se ha materializado en una propiedad paradójica de unos conjuntos de puntos.

Llamamos $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\}$. Sea A la unión de todos los radios con un extremo en 0 y el otro en un punto de A^* (consideramos que los radios contienen a este último punto, pero no al 0). Igualmente definimos B, C y D. Es obvio que $\mathbb{B} = A \cup B \cup C \cup D \cup \{0\}$ es una partición de $\mathbb{B}$, así como que

$$\Phi[A] = B \cup C, \qquad \Psi[A] = B, \qquad \Psi^2[A] = C.$$

Diremos que dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son *congruentes* si hay un movimiento que transforma uno en otro. Como los movimientos son un grupo, la congruencia es una relación de equivalencia.

En estos términos resulta que A, B y C son congruentes dos a dos, pero también es cierto que A es congruente con $B \cup C$. De este modo, A puede ser dividido en dos subconjuntos disjuntos, cada uno de los cuales es congruente con A. Como B y C son congruentes con A, lo mismo es cierto para ellos.

Notemos que $A \cup B \cup C$ constituye la mayor parte de $\mathbb{B}$. Si en lugar de duplicar $\mathbb{B}$ nos contentamos con duplicar $A \cup B \cup C$, ya hemos terminado: basta dividir cada parte en dos partes congruentes a ellas mismas, separarlas, volverlas a reordenar, y ya tenemos dos copias de $A \cup B \cup C$. Para lograrlo con las esferas completas hay que trabajar un poco más.

[2]Ésta es la razón por la que hemos eliminado los puntos de D^*, para obtener ahora una partición.

Teorema *Existe un giro h tal que $h[D] \subset A \cup B \cup C$.*

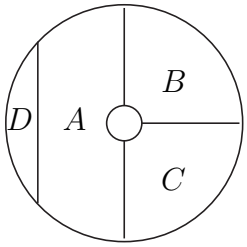
DEMOSTRACIÓN: Basta probar que existe un giro h tal que $h[D^*] \subset A^* \cup B^* \cup C^*$. Fijemos un eje que no pase por puntos de D^* (es decir, que pase por cualquier punto de la esfera S que no pertenezca al conjunto numerable D^* ni al conjunto numerable de sus puntos antípodas.) Para cada ángulo ω, sea h_ω el giro de ángulo ω respecto al eje elegido.

Sea $D^* = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de los puntos de D^* y sea

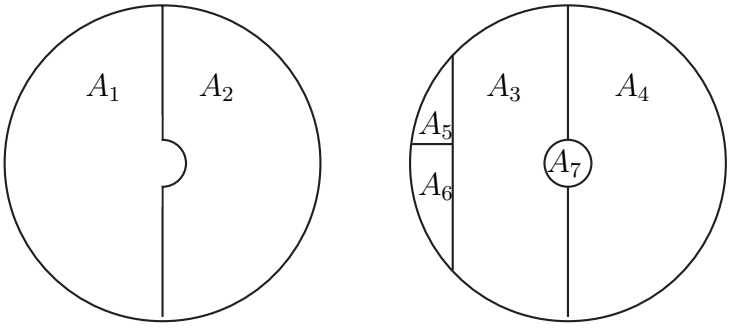
$$G_n = \{\omega \in [0, \pi] \mid h_\omega(x_n) \in D^*\}.$$

La aplicación $G_n \longrightarrow D^*$ dada por $\omega \mapsto h_\omega(x_n)$ es inyectiva, luego el conjunto G_n es numerable, y también lo es $\bigcup_n G_n$. Basta tomar $\omega \in [0, \pi] \setminus \bigcup_n G_n$ y el giro h_ω cumple lo pedido. ∎

Para visualizar el argumento que vamos a seguir, representamos de este modo la partición de $\mathbb{B}$ que hemos obtenido:

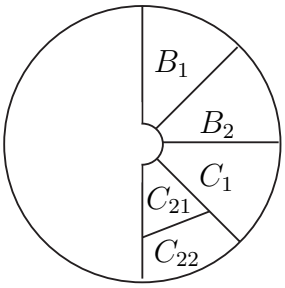


El círculo central representa el punto 0. Mediante un giro h podemos mover D hasta que quede contenido en $A \cup B \cup C$. Llamemos D_1 a la parte de D que queda contenida en A y D_2 a la que queda en $B \cup C$. Evidentemente, todo esto puede hacerse con cualquier bola de radio 1, no necesariamente la de centro 0. Tomemos dos bolas disjuntas y dividámoslas como sigue:



La parte A_1 está formada por las partes A, D y el centro de una bola, la parte A_2 está formada por las partes B y C de la misma bola, la parte A_3 es la parte A de la otra bola, A_4 es $B \cup C$, A_5 es D_1, A_6 es D_2 y, finalmente, A_7 es el centro de la segunda bola.

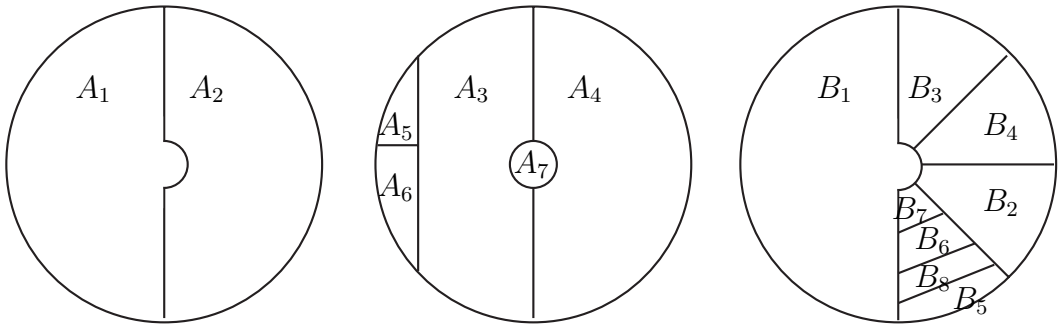
Por otra parte, dividamos B y C en dos partes disjuntas $B = B_1 \cup B_2$, $C = C_1 \cup C_2$, congruentes con todo B (y con todo C). A su vez dividimos $C_2 = C_{21} \cup C_{22}$, con todos los conjuntos congruentes entre sí.



Mediante un movimiento podemos llevar A_6 dentro de $B \cup C$. Obviamente no ocupamos todo $B \cup C$ porque sólo ocupamos una cantidad numerable de puntos de la superficie. Mediante otro movimiento, llevamos A_7 dentro de $B \cup C$, a un punto que no pertenezca al conjunto donde hemos llevado a A_6. Mediante otro movimiento llevamos $B \cup C$ hasta A, de aquí a C, de aquí a C_2 y de aquí a C_{21}. En resumen, mediante un movimiento podemos llevar A_6 hasta un subconjunto de C_{21} y al punto A_7 hasta otro punto de C_{21}. Llamemos B_6 y B_7 a estas imágenes en C_{21}.

También mediante un movimiento A_5 va a parar dentro de A, de aquí a C y de C a C_{22}. Llamemos B_5 a la imagen de A_5 dentro de C_{22}.

Por otra parte, A_2, A_3 y A_4 son congruentes con todo C_{21}, B_1 y B_2, respectivamente. En conclusión, tenemos la siguiente partición de una bola en ocho trozos:



Cada parte A_i es congruente con B_i, para $i = 1, \ldots, 7$. La parte B_8, que es el complemento en C_2 de B_5, B_6 y B_7, no tiene correspondiente en ninguna de las dos bolas.

Esto es casi lo que buscamos: hemos dividido dos bolas en siete partes que, mediante movimientos, forman una sola bola menos el trozo B_8. Llamemos X a las dos bolas disjuntas e Y a la otra bola. Tenemos una aplicación inyectiva $f : X \longrightarrow Y$ que sobre cada conjunto A_i es un movimiento. La imagen de f es $Y \setminus B_8$.

Por otro lado, podemos definir una aplicación biyectiva $g : Y \longrightarrow X$ que a cada punto de Y lo traslade hasta $A_1 \cup A_2$.

El teorema de Cantor–Bernstein afirma que cuando tenemos aplicaciones inyectivas de un conjunto en otro y de otro en uno, en realidad existe una aplicación biyectiva entre ellos. Vamos a ver que la demostración de este teorema nos da en nuestro caso la congruencia a trozos que buscamos, es decir, nos elimina el residuo. La demostración se basa en el teorema siguiente:

Teorema *Sea X un conjunto y $F : \mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}X$ tal que si $u \subset v \subset X$, entonces $F(u) \subset F(v)$. En estas condiciones existe un $z \in \mathcal{P}X$ tal que $F(z) = z$.* (No confundir $F(u)$ con $F[u]$, que en este contexto no tiene sentido).

Demostración: Sea $A = \{u \in \mathcal{P}X \mid F(u) \subset u\}$. Se cumple que A es un conjunto no vacío, pues obviamente $X \in A$. Llamemos $z = \bigcap_{u\in A} u$. Así $z \in \mathcal{P}X$. Si $u \in A$, entonces $z \subset u$, luego $F(z) \subset F(u) \subset u$ y, por lo tanto, $F(z) \subset \bigcap_{u\in A} u = z$.

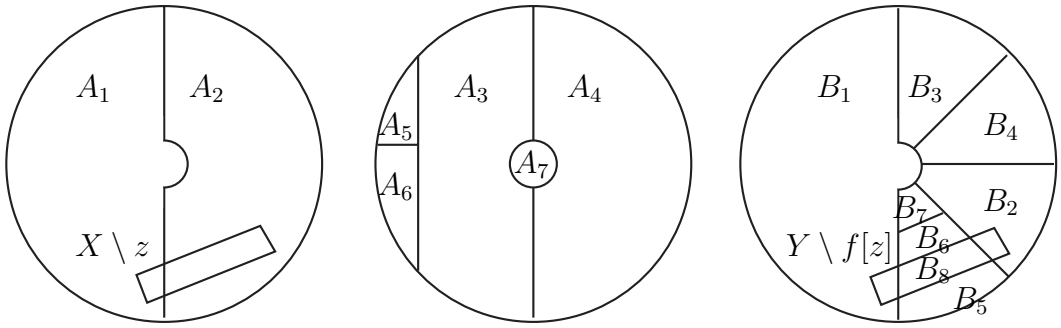
Aplicando la hipótesis, $F(F(z)) \subset F(z)$, luego $F(z) \in A$, y por consiguiente $z \subset F(z)$. En total, $F(z) = z$. ∎

Consideremos ahora aplicaciones inyectivas $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$. Definimos la aplicación $F : \mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}X$ dada por $F(u) = X \setminus g[Y \setminus f[u]]$. Se cumple la hipótesis del teorema anterior, pues si $u \subset v \subset X$, entonces $f[u] \subset f[v]$, $Y \setminus f[v] \subset Y \setminus f[u]$, $g[Y \setminus f[v]] \subset g[Y \setminus f[u]]$, $X \setminus g[Y \setminus f[u]] \subset X \setminus g[Y \setminus f[v]]$, luego $F(u) \subset F(v)$.

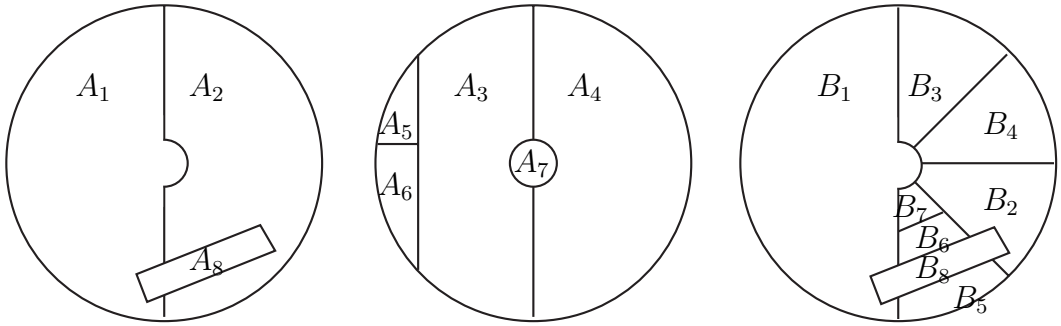
En consecuencia, existe un subconjunto z de X tal que $F(z) = z$. Esto significa que $X \setminus g[Y \setminus f[z]] = z$ o, de otra forma, $X \setminus z = g[Y \setminus f[z]]$.

Así, $f|_z : z \longrightarrow f[z]$ es biyectiva y $g|_{Y\setminus f[z]} : Y \setminus f[z] \longrightarrow X \setminus z$ también. Ambas biyecciones se unen en una única biyección de X en Y.

Esto prueba el teorema de Cantor-Bernstein, pero en nuestro caso podemos afinar más. En primer lugar, $X \setminus z = g[Y \setminus f[z]] \subset g[Y] = A_1 \cup A_2$, luego $A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \subset z$, luego $B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_7 \subset f[z]$, luego $Y \setminus f[z] \subset B_1 \cup B_2 \cup B_8$. Además $B_8 \subset Y \setminus f[z]$.



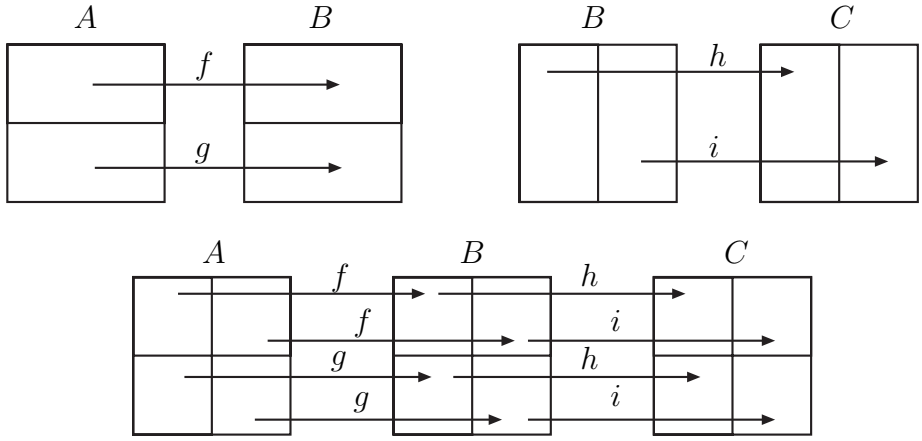
Ahora llamamos $A_8 = X \setminus Z$ y redefinimos A_1 y A_2 quitándoles su parte de A_8. Redefinimo: $B_8 = Y \setminus f[z]$ y quitamos a B_1 y B_2 su parte de $Y \setminus f[z]$.



Así tenemos X e Y divididos en 8 partes y, para cada $i = 1, \ldots, 7$, se cumple que la restricción de f a A_i es un movimiento que lo lleva hasta B_j, mientras que la traslación g lleva B_8 hasta A_8. Notemos que una de las ocho partes (A_7) es un sólo punto. Esto termina la prueba de la Paradoja de Banach-Tarski.

Más en general, se dice que dos subconjuntos A y B de $\mathbb{R}^3$ son *congruentes a trozos* si pueden dividirse en un número finito de partes congruentes entre sí. Lo representaremos por $A \sim B$. Hemos probado que una bola de radio 1 es congruente a trozos con dos bolas disjuntas de radio 1. Evidentemente el radio no importa, luego podemos afirmar que una bola cualquiera es congruente a trozos con dos bolas disjuntas del mismo radio.

No es difícil probar que la congruencia a trozos es una relación de equivalencia. Lo único que no es inmediato es la transitividad. La figura siguiente esboza la demostración:



Es claro que si $A \sim B$, $A' \sim B'$ y $A \cap A' = B \cap B' = \varnothing$, entonces $A \cup A' \sim B \cup B'$.

Escribiremos $A \preceq B$ para indicar que el conjunto A es congruente a trozos con un subconjunto de B. Es fácil ver que si $A \preceq B \preceq C$, entonces $A \preceq C$. Vamos a probar que si $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces $A \sim B$.

Tenemos aplicaciones inyectivas $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$ que son movimientos a trozos, es decir, A está dividido en un número finito de partes y la restricción de f a cada una de ellas es un movimiento. Igualmente con g. Según lo visto antes, existe un subconjunto Z de A tal que $g[B \setminus f[Z]] = A \setminus Z$. Claramente, tenemos que $Z \sim f[Z]$ y $B \setminus f[Z] \sim g[B \setminus f[Z]] = A \setminus Z$, luego

$$A = Z \cup (A \setminus Z) \sim f[Z] \cup (B \setminus f[Z]) = B.$$

Teorema *Una bola de radio r es congruente a trozos con cualquier unión finita de bolas del mismo radio, no necesariamente disjuntas.*

Demostración: Si vale para n bolas, sea B una bola, sea C una unión de n bolas y D otra bola, todas del mismo radio. Tomemos aparte dos bolas disjuntas B_1 y B_2. Entonces, por hipótesis de inducción, $C \sim B_1$ y $C \setminus D \preceq B_2$. Como son disjuntos,

$$C \cup D \preceq B_1 \cup B_2 \sim B \sim D \preceq C \cup D.$$

Consecuentemente $B \sim C \cup D$, que es una unión de $n+1$ bolas. ∎

De aquí deducimos un resultado general sobre congruencia a trozos:

Teorema *Si A y A' son subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ acotados y de interior no vacío, entonces son congruentes a trozos.*

DEMOSTRACIÓN: A y A' contienen sendas bolas cerradas del mismo radio r, digamos B y B'. Por compacidad, A puede ser cubierto por un número finito de bolas del mismo radio. Sea C dicha unión finita. Sabemos que $B \preceq A \preceq C \sim B$, luego $A \sim B$, y análogamente $A' \sim B' \sim B \sim A$. ∎

Así pues, es posible dividir en un número finito de trozos una bola del tamaño de la Tierra, reordenar los trozos y obtener una bola del tamaño del Sol.

Referencias

[1] STROMBERG, K *The Banach-Tarski Paradox,* Amer. Math. Monthly, Vol 86, No 3, (1979) pp. 151–161.